На правах рукописи

Игнатьева Марина Александровна

СМЕШАННЫЙ ГИБРИДНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2004

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова — Ленина”.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Лапин Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Карчевский Михаил Миронович
	доктор физико-математических наук, профессор Чижонков Евгений Владимирович
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики РАН, г. Москва

Защита диссертации состоится “____” ____________ 2004 г. в 14^{30} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова — Ленина (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова — Ленина.

Автореферат разослан “____” ____________ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доцент Агачев Ю. Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория вариационных неравенств является интенсивно развивающейся областью нелинейного анализа, сформировавшейся к настоящему времени как самостоятельная дисциплина и занимающей важное место в математике и механике. В виде вариационных неравенств формулируются задачи математической физики со свободными границами, описывающие, например, фильтрацию жидкости в пористой среде, пластические и вязко-пластические деформации, контакт упругих тел, фазовые переходы.

Широко используемым методом решения задач математической физики является метод конечных элементов (МКЭ). Несмотря на то, что этот метод в достаточной степени теоретически разработан, остается много проблем его эффективного использования при решении прикладных задач, в особенности задач большой размерности, нелинейных задач и т. д.

Одной из проблем при использовании МКЭ является проблема повышения точности численного решения. В некоторых случаях повысить точность аппроксимации удается за счет применения смешанного и смешанного гибридного МКЭ.

Смешанные и смешанные гибридные формулировки краевых задач с дифференциальными операторами второго порядка позволяют применять МКЭ с одновременной аппроксимацией искомой функции и ее градиента. Это дает возможность находить градиент решения более точно по сравнению с приемом численного дифференцирования уже найденного решения задачи. Таким образом, в прикладных задачах, где интерес представляют также градиенты решения, смешанные МКЭ являются важным инструментом численного решения.

В результате аппроксимации вариационных неравенств, как в классической, так и в смешанной гибридной постановке, получаются, как правило, сеточные вариационные неравенства большой размерности и возникает другая проблема, связанная с необходимостью построения эффективных итерационных методов их решения.

Построение быстрых итерационных методов численной реализации схем МКЭ для линейных уравнений большей частью основывается на построении спектрально эквивалентных предобусловливателей для матриц соответствующих сеточных схем.

В работе Ю. А. Кузнецова[1] построен спектрально эквивалентный предобусловливатель для матрицы уравнения, к которому сводится решение смешанной гибридной аппроксимации линейного эллиптического уравнения при применении элементов низкого порядка. В качестве предобусловливателя выступает сеточный оператор Лапласа на более мелкой сетке. В настоящей диссертационной работе эти результаты обобщены на случай вариационных

[1] *Kuznetsov Yu. A.* Spectrally equivalent preconditioners for mixed hybrid discretizations of diffusion equations on distorted meshes / Yu. A. Kuznetsov // J. Numer. Math. – 2003. – V. 11. – P. 61–74.

неравенств с ограничениями на границе или внутри области, что позволяет построить итерационный метод, в котором сеточный оператор Лапласа является предобусловливателем. Следует однако отметить, что реализация каждого шага этого метода состоит в решении сеточного вариационного неравенства с сеточным оператором Лапласа и, тем самым, эффективность построенного метода зависит от эффективности соответствующей двухступенчатой процедуры его реализации. Для решения уравнения с оператором Лапласа разработаны эффективные методы и имеется готовое программное обеспечение, в то время как для рассматриваемого случая вариационного неравенства этого сказать нельзя.

В диссертации предложен эффективный итерационный метод решения классической (не смешанной) схемы МКЭ для вариационных неравенств с ограничениями на границе области, который в свою очередь применен для построения двухступенчатого итерационного метода решения построенной смешанной гибридной схемы МКЭ для задачи Синьорини.

Другим способом построения эффективных итерационных методов является использование метода декомпозиции области, который приобрел в последнее время большую популярность в связи с развитием параллельных вычислений. Особенностью метода является то, что он позволяет свести решение исходной сеточной задачи к решению подзадач меньшей алгебраической размерности, которые связаны между собой некоторым условием в небольшом числе точек (на линиях разрезов области). Решение задач в подобластях может осуществляться параллельно.

Еще одним аргументом в пользу применения метода декомпозиции области в случае задач со свободными границами является следующий. Как правило, на основе некоторой априорной информации можно выделить подобласти, содержащие свободную границу, причем размеры этих подобластей могут быть достаточно малы по сравнению со всей областью, в которой отыскивается решение краевой задачи. При соответствующем разбиении области на подобласти мы приходим к необходимости решать в большой подобласти краевую задачу для уравнения и лишь в малой подобласти — задачу с ограничениями. Кроме того, в подобластях, содержащих свободную границу, можно применять аппроксимации на мелкой сетке, если в результате решения задачи нужно достаточно точно определять положение свободной границы.

Таким образом, данная работа, посвященная построению и исследованию смешанных гибридных МКЭ для вариационных неравенств, а также разработке эффективных методов решения как смешанных гибридных, так и классических аппроксимаций вариационных неравенств, является актуальной.

Целями работы являются:

1. Построение схем смешанного гибридного МКЭ для вариационных неравенств с дифференциальными операторами второго порядка.

2. Конструирование алгоритмов решения вариационных неравенств на

основе метода декомпозиции области.

3. Разработка и исследование численных методов решения конечномерных уравнений, полученных в результате аппроксимации рассматриваемых задач.

4. Проведение вычислительных экспериментов и анализ их результатов.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем.

1. Построены и исследованы смешанные гибридные схемы МКЭ для эллиптических вариационных неравенств с ограничениями на решение внутри или на границе области. Сконструированы эффективные итерационные методы их численной реализации.

2. Для задачи о препятствии построены сеточные схемы на основе метода декомпозиции области с неналегающими подобластями и несогласованными сетками в подобластях. Для численной реализации схем теоретически исследованы и численно реализованы итерационные схемы расщепления.

3. Построена смешанная гибридная схема для двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией. Для ее решения применен метод, разработанный для решения эллиптических вариационных неравенств.

4. Построены и численно исследованы схемы типа предиктор–корректор для двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией.

Достоверность полученных теоретических результатов обеспечивается строгими доказательствами сформулированных утверждений. Достоверность числовых расчетов подтверждена совпадением результатов с известными.

Научное и практическое значение работы. Работа носит, в основном, теоретический характер. Разработанные итерационные методы вносят вклад в развитие численных методов решения нелинейных задач. Вместе с тем, разработанные методы использованы при численном решении задачи Стефана с предписанной конвекцией, моделирующей процесс непрерывной выплавки металлов. Предложенные подходы, методы и алгоритмы могут быть использованы при решении и других прикладных задач.

На защиту выносятся следующие результаты диссертационной работы:

1. Смешанные гибридные постановки эллиптических вариационных неравенств с ограничениями на решение внутри или на границе области, обоснование их эквивалентности исходным дифференциальным постановкам.

2. Обоснование итерационного метода решения построенных сеточных схем смешанных гибридных элементов, оценка скорости его сходимости.

3. Сеточные схемы для задачи о препятствии, построенные на несогласованных сетках на основе декомпозиции области с неналегающими подобластями; обоснование сходимости итерационного метода Дугласа — Рэкфорда для построенных схем.

4. Смешанная гибридная схема конечных элементов для полудискретной задачи Стефана с предписанной конвекцией и обоснование итерационного метода ее решения.

5. Схемы типа предиктор–корректор для двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Итоговых научных конференциях Казанского государственного университета; на семинарах Отделения математического моделирования НИИММ им. Н. Г. Чеботарева КГУ; на Всероссийской молодежной научной школе-конференции по математическому моделированию, геометрии и алгебре, г. Казань, 4 – 11 декабря 1997 г.; Всероссийской школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", г. Казань, 13 – 18 сентября 1999 г.; Первом и Втором российско-финском семинарах "Численные методы для задач непрерывной выплавки и смежных проблем", г. Казань, 14 – 18 апреля 2001 г. и 11 – 15 июля 2003 г.; Международной молодежной школе-конференции "Iterative methods and matrix computations", г. Ростов-на-Дону, 2 – 9 июня 2002 г.; Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач", г. Казань, 27 июня – 1 июля 2003 г.; Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", г. Москва, 16 – 22 мая 2004 г.; Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Численные методы решения задач математической физики", г. Казань, 27 июня – 2 июля 2004 г.

В целом диссертация была доложена на совместном семинаре Кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета и Отдела вычислительной математики НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Публикации. Основные результаты изложены в 7 работах. В совместных работах автор принимал участие на всех этапах исследования, непосредственно автору принадлежат описание вычислительных экспериментов и анализ их результатов.

Структура диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Библиография включает 96 наименований. Общий объем диссертации составляет 145 страниц, включая 21 таблицу и 16 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дан обзор литературы по теме исследования, определены цели и задачи исследования, приведена структура диссертации.

Первая глава содержит обзор известных сведений по тематике работы. Рассмотрена общая формулировка вариационного неравенства, примерами которого являются все задачи, рассматриваемые в диссертации. Приведены результаты о существовании, единственности и гладкости решений эллиптических вариационных неравенств. Рассмотрены классические схемы МКЭ первого порядка. Дана постановка задачи Стефана с предписанной конвекцией, приведен результат о существовании ее решения. Также приведены некоторые сведения о пространствах Соболева, из теории максимально монотонных операторов и выпуклого анализа.

Вторая глава посвящена смешанным гибридным схемам для эллиптических вариационных неравенств и итерационным методам их решения.

В п. 2.1 рассмотрен смешанный гибридный метод для класса задач с ограничениями на искомую функцию на границе области, построены сеточные схемы и исследован итерационный метод их решения. Основные идеи подробно изложены на примере задачи Синьорини.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ — область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_C$, где Γ_D, Γ_N и Γ_C — непересекающиеся части $\partial\Omega$, и $\operatorname{mes}\Gamma_D \neq 0$. Определим также подпространство $V = \{u \in H^1(\Omega) |\ u(x) = 0$ п. вс. на $\Gamma_D\}$ пространства Соболева первого порядка $H^1(\Omega)$ и выпуклое замкнутое множество $K = \{u \in V |\ u(x) \geqslant 0$ п. вс. на $\Gamma_C\}$. Задача Синьорини состоит в отыскании функции $u \in K$, такой, что выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla (q-u) dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(q-u) dx \quad \forall q \in K, \tag{1}$$

где $f \in L_2(\Omega)$ — известная функция. Известно, что задача (1) имеет единственное решение $u \in H^2(\Omega)$.

Даны смешанная формулировка задачи, в которой неизвестными являются две функции: искомая функция u и ее градиент $\mathbf{v} = \nabla u$; и смешанная гибридная постановки задачи Синьорини, в которой присутствуют три неизвестные функции: u, $\mathbf{v}$ и λ.

Для определения смешанной гибридной формулировки введено конформное разбиение области на непересекающиеся элементы $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \bar{e}_i$ и пусть

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L_2(\Omega)^n |\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathscr{H}(\mathrm{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega) |\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega)\}.$$

Пространства искомых функций и допустимое множество зададим равенствами $\mathbf{V} = \prod_{i=1}^m \mathscr{H}(\mathrm{div}, e_i)$, $U = \prod_{i=1}^m L_2(e_i)$, $\quad M_{ad}^\lambda = \{\lambda \in \Lambda |\ \lambda_{ij} \geqslant 0$ для

$\Gamma_{ij} \cap \Gamma_C\}$, где $\Lambda = \prod_{i<j} L_2(\Gamma_{ij})$ и через Γ_{ij} обозначена общая сторона элементов e_i и e_j. Предположим, что $\partial\Omega$ состоит из s отрезков, которые обозначим $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$. Пересечение ∂e_i с Γ_j, $j = \overline{1,s}$ обозначим через $\Gamma_{i,m+j}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,s}$ и пусть $\Gamma_{i,m+j}$ для $j = \overline{1,s_1}$, $s_1 < s$ составляют $\Gamma_N \cup \Gamma_C$, в то время как $\Gamma_{i,m+k}$, $k = \overline{s_1+1,s}$ составляют Γ_D.

Пусть далее $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ и билинейные формы $\mathscr{M} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{B} : U \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{G} : \Lambda \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ определены равенствами

$$\mathscr{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{e_i} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i dx, \quad \mathscr{B}(u,\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{e_i} u_i \operatorname{div} \mathbf{w}_i dx,$$

$$\mathscr{G}(\lambda,\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=i+1}^{m} \int\limits_{\Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} d\Gamma - \sum_{j=i+1}^{s_1} \int\limits_{\Gamma_{i,m+j}} \lambda_{i,m+j}(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_{i,m+j}) d\Gamma \Big),$$

и задан линейный функционал

$$\mathscr{F}(q) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{e_i} f_i q_i dx.$$

Смешанная гибридная постановка сформулирована следующим образом: найти тройку $(\mathbf{v}, u, \lambda) \in \mathbf{V} \times U \times M_{ad}^{\lambda}$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{cases} \mathscr{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathscr{B}(u,\mathbf{w}) + \mathscr{G}(\lambda,\mathbf{w}) = 0 & \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ \mathscr{B}(q,\mathbf{v}) = -\mathscr{F}(q) & \forall\, q \in U, \\ \mathscr{G}(\mu - \lambda, \mathbf{v}) \leqslant 0 & \forall\, \mu \in M_{ad}^{\lambda}. \end{cases} \tag{2}$$

Доказана следующая теорема об эквивалентности смешанной гибридной постановки исходной.

Теорема 1. *Задача Синьорини (1) и смешанная гибридная задача (2) эквивалентны в следующем смысле:*

если u — решение (1), то тройка $(\mathbf{v}, u, \lambda)$ является решением (2), где $u_i = u\big|_{e_i}$ — сужение u на e_i, $\mathbf{v}_i = \nabla u_i$ п. вс. на e_i и $\lambda_{ij} = u_i$ п. вс. на Γ_{ij} ;

обратно, если $(\mathbf{v}, u, \lambda)$ — решение задачи (2), то функция $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $u_i = u\big|_{e_i}$, является решением задачи (1) и $\mathbf{v}_i = \nabla u$ п. вс. на e_i, $\lambda_{ij} = u$ п. вс. на Γ_{ij}.

Из теоремы на основании известного факта о существовании и единственности решения задачи Синьорини (1) следует существование единственного решения смешанной гибридной постановки.

Построена аппроксимация смешанной гибридной схемы с использованием конечных элементов низкого порядка, а именно, вектор-функции $u \in U$ и $\lambda \in \Lambda$ аппроксимированы вектор-функциями с постоянными компонентами. Для аппроксимации $\mathbf{v}$ использовано пространство Равьяра – Тома RT_0

функций $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$, таких, что нормальная составляющая $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}$ компоненты $\mathbf{v}_i$ на каждой из сторон Γ_{ij} элемента e_i является константой.

Аппроксимация задачи (2) записана в виде так называемого "конденсированного" конечномерного включения относительно вектора степеней свободы конечномерной аппроксимации функции λ:

$$S\bar{\lambda} + C\bar{\lambda} \ni F. \tag{3}$$

Известно, что матрица S является симметричной положительно определенной матрицей, C — субдифференциал индикаторной функции множества ограничений на вектор $\bar{\lambda}$ — является многозначным максимально монотонным диагональным оператором. Отсюда следует существование единственного решения задачи (3).

Далее предполагается $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Известно, что в случае квадратной сетки с шагом h матрица S спектрально эквивалентна дополнению Шура $S_{\mathcal{A}}$ для пятиточечного оператора Лапласа, построенного на сетке с шагом $h/2$:

$$\alpha(S_{\mathcal{A}}\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leqslant (S\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leqslant \beta(S_{\mathcal{A}}\bar{\xi}, \bar{\xi}) \quad \forall\, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{\lambda}, \tag{4}$$

где положительные константы α и β не зависят от h, а размерность пространства $\mathbb{R}^{\lambda}$ равна размерности вектора $\bar{\lambda}$.

Доказана

Теорема 2. *Итерационный метод*

$$S_{\mathcal{A}}\frac{\bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}^{n}}{\tau} + S\bar{\lambda}^{n} + C\bar{\lambda}^{n+1} \ni F \tag{5}$$

сходится при $\tau \in (0,\ 2/\beta)$ и для оптимального значения $\tau = 2/(\alpha + \beta)$ справедлива следующая оценка:

$$(S_{\mathcal{A}}(\bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}), \bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda})^{1/2} \leqslant \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}(S_{\mathcal{A}}(\bar{\lambda}^{n} - \bar{\lambda}), \bar{\lambda}^{n} - \bar{\lambda})^{1/2},$$

где α, β — константы спектральной эквивалентности S и $S_{\mathcal{A}}$.

Одна итерация метода (5) равносильна решению конечномерного включения с сеточным оператором Лапласа.

Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие, что число итераций предложенного метода не зависит от шага сетки и скорость сходимости метода для включения (3) такая же, как и в случае решения методом (5) уравнения Пуассона, т. е. при $C \equiv 0$.

Для решения классической аппроксимации МКЭ задачи Синьорини со стандартной пятиточечной аппроксимацией эллиптической части построен и исследован эффективный двуступенчатый итерационный метод. Идея построенного метода опирается на то, что ограничения на искомую функцию присутствуют лишь в точках границы. Это позволяет построить итерационный процесс, на каждой итерации которого нужно решать, во-первых, линейное уравнение во всей области, для чего можно применять известные эффективные методы, как, например, метод Фурье или многосеточный метод, и, во-вторых, конечномерное включение малой, по сравнению со всей областью, алгебраической размерности.

Число операций, необходимых для реализации предложенного метода, оценено величиной порядка $\mathcal{O}(h^{-2}\ln^2 1/h)$. Построенный метод может быть использован при осуществлении итерации метода (5).

Приведены результаты вычислительных экспериментов по реализации метода (5) с использованием в качестве внутреннего итерационного процесса построенного двуступенчатого метода.

В п. 2.2 построена смешанная гибридная схема для задачи о препятствии внутри области:

$$u \in K: \quad \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla (q-u)dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(q-u)dx \quad \forall q \in K, \tag{6}$$

где $K = \{u \in H_0^1(\Omega) |\ u(x) \geqslant 0$ п. вс. в $\Omega\}$ и $f \in L_2(\Omega)$. Известно, что единственное решение задачи $u \in H^2(\Omega)$. Смешанная гибридная формулировка в этом случае следующая: найти тройку $(\mathbf{v}, u, \lambda) \in \mathbf{V} \times M_{ad}^u \times \Lambda$, такую, что

$$\begin{cases} \mathscr{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathscr{B}(u,\mathbf{w}) + \mathscr{G}(\lambda,\mathbf{w}) = 0 & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ \mathscr{B}(q-u,\mathbf{v}) \leqslant -\mathscr{F}(q-u) & \forall q \in M_{ad}^u, \\ \mathscr{G}(\mu,\mathbf{v}) = 0 & \forall \mu \in \Lambda, \end{cases} \tag{7}$$

где $M_{ad}^u = \{u \in U |\ u_i \geqslant 0$ п. вс. на $e_i\}$. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности задач (6) и (7), аналогичная теореме 1.

Аппроксимация задачи (7) также проведена аналогично задаче Синьорини и после аппроксимации конденсированное включение записано в виде

$$S\bar{\mu} + \tilde{C}\bar{\mu} \ni F, \tag{8}$$

где $\bar{\mu} = (\bar{u}, \bar{\lambda})^T$, S — симметричная положительно определенная матрица, $\tilde{C}$ — субдифференциал индикаторной функции множества ограничений $M_{ad}^{\bar{u}} = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^{N_u} |\ u_i \geqslant 0$ для всех $i\}$. В этом случае для матрицы S включения (8) также справедлива оценка вида (4), откуда следует, что скорость сходимости итерационного процесса (5) для решения включения (8) не зависит от h. Однако в этом случае оценка (4) несколько хуже. А именно, в случае квадратных сеток для задачи Синьорини $\alpha = 1$, $\beta = 3$, в то время как для задачи о препятствии $\alpha = 1$, $\beta = 6$. Следовательно, при решении этих двух задач методом (5) с заданной точностью для задачи о препятствии нужно сделать больше итераций.

Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Третья глава посвящена разработке сеточных схем для задачи о препятствии на основе метода декомпозиции области.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрена задача о препятствии, причем предполагается, что известна область $\Omega_2 \subset \Omega$, в которой находится свободная граница.

В п. 3.1 дана постановка задачи минимизации: найти функцию $u \in K$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int\limits_{\Omega} f u dx, \tag{9}$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $K = \{u \in H_0^1(\Omega) | \; u(x) \geqslant 0$ для п. вс. $x \in \Omega_2\}$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_2$,

$$V_i = \{u_i \in H^1(\Omega_i) \mid u_i(x) = 0 \text{ для п. вс. } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \quad i = 1, 2\},$$

$$K_1 = \{(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 \mid \; u_1(x)|_S = u_2(x)|_S \text{ для п. вс. } x \in S\},$$

$$K_2 = \{u_2 \in V_2 \mid u_2(x) \geqslant 0 \text{ для п. вс. } x \in \Omega_2\}, \quad M = \{(u_1, u_2) \in K_1 \cap K_2\},$$

где $S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Тогда задача (9) может быть сформулирована эквивалентным образом: найти пару функций $(u_1, u_2) \in M$, доставляющую минимум функционалу

$$J_{1,2}(u_1, u_2) = J_1(u_1) + J_2(u_2), \quad J_i(u_i) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 dx - \int\limits_{\Omega_i} f u_i dx. \tag{10}$$

В п. 3.2 задача (10) записана в виде вариационного неравенства

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} \nabla u_i \nabla (v_i - u_i) dx + I_M(v_1, v_2) - I_M(u_1, u_2) \geqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_i} f(v_i - u_i) dx \tag{11}$$

$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$. Здесь I_M — индикаторная функция множества M.

В предположении, что $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0,1)$, построена аппроксимация вариационного неравенства (11) на несогласованных сетках. А именно, в области Ω_1 построена квадратная сетка с шагом H, в области Ω_2 — квадратная сетка с шагом $h = H/m$, где $m > 0$ — произвольное целое число. Функции в (11) аппроксимированы кусочно-билинейными и непрерывными функциями на соответствующих сетках, для вычисления интегралов использована составная квадратурная формула трапеций. Множество M аппроксимировано множеством

$$M_h = \{(u_{1h}, u_{2h}) \in V_{1h} \times V_{2h} | \; u_{2h}(x) \geqslant 0, \; u_{1h}|_S = u_{2h}|_S\},$$

где $V_{ih} \subset V_i$ — пространства кусочно-билинейных непрерывных функций, билинейных на каждой из ячеек сетки.

Показано, что аппроксимацию задачи (11) можно записать в матрично-векторной форме:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2\bar{u}_2 \end{pmatrix} + C_K(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \ni \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где C_2 и C_K — субдифференциалы индикаторных функций множеств ограничений на векторы узловых параметров в Ω_2 и на S соответственно, A_i — сеточная аппроксимация оператора Лапласа в подобласти Ω_i с условием Неймана на границе S и условием Дирихле на границе $\partial\Omega_i \setminus S$.

После соответствующих обозначений задача (12) записана в виде

$$A\bar{u} + C\bar{u} \ni \bar{f} \qquad (13)$$

с симметричной и положительно определенной матрицей A и максимально монотонным диагональным оператором C. Здесь $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T$, $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)^T$. Свойства матрицы A и оператора C обеспечивают существование единственного решения включения (13).

Для решения включения (13) исследованы возможность применения и вопросы реализации схемы расщепления

$$\begin{cases} D^{-1}(\bar{u}^{n+1/2} - \bar{u}^n) + A\bar{u}^n + C(\bar{u}^{n+1/2}) \ni \bar{f}, \\ B(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n) = \bar{u}^{n+1/2} - \bar{u}^n, \end{cases} \qquad (14)$$

где в качестве D выбрана диагональная матрица итерационных параметров $D = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_2)$, такая, что задача в каждой подобласти имеет свой итерационный параметр $\tau_i > 0$, $C(\bar{u}^{n+1}) = (C(u_1^{n+1}), C(u_2^{n+1}), \ldots)$.

Реализация первого шага метода сводится к нахождению значений u_1 и u_2 во внутренних точках подобластей по явным формулам. Показано, что для нахождения значений u_1 на границе S получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей (при любом m), решив которую, найдем значения u_2 при помощи линейной интерполяции. Второй шаг метода (14) при выборе матрицы B в блочно-диагональном виде состоит в решении двух несвязных систем по подобластям, которое может осуществляться параллельно. Вычислительные эксперименты были проведены для случая $B = E + DA$, что соответствует схеме Дугласа – Рэкфорда.

В этом случае (A — положительно определенная матрица, C — максимально монотонный оператор) известны оценки скорости сходимости метода Дугласа – Рэкфорда и оптимальные итерационные параметры.

В п. 3.3 ограничения $u_1 = u_2$ на разрезе S учтены с помощью множителей Лагранжа λ. От задачи минимизации (10) осуществлен переход к задаче поиска седловой точки лагранжиана $\mathscr{L} : (u_1, u_2, \lambda) \in V_1 \times K_2 \times L_2(S) \to$ $\to \mathscr{L}(u_1, u_2, \lambda) \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{L}(u_1, u_2, \lambda) = J_1(u_1) + J_2(u_2) + \int\limits_S \lambda(u_1 - u_2)dS. \tag{15}$$

Известно, что критерием седловой точки лагранжиана (15) являются соотношения

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int\limits_S \lambda v_1 d\Gamma = \int\limits_{\Omega_1} f_1 v_1 dx \quad \forall v_1 \in V_1, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla (v_2 - u_2) dx - \int\limits_S \lambda (v_2 - u_2) d\Gamma \geqslant \int\limits_{\Omega_2} f_2 (v_2 - u_2) dx \quad \forall v_2 \in K_2, \tag{17}$$

$$\int\limits_S (u_1 - u_2)\mu d\Gamma = 0 \quad \forall \mu \in L_2(S). \tag{18}$$

В области Ω построена сетка, как описано в п. 3.2, и проведена аппроксимация задачи (16) – (18). При этом, для аппроксимации u_1 и u_2 использованы пространства кусочно-билинейных непрерывных функций на соответствующих сетках и для аппроксимации множителей Лагранжа λ использовано пространство следов функций из V_{2h} на S. При вычислении интегралов использована составная квадратурная формула трапеций, причем, для вычисления интеграла по границе S использована квадратурная формула на сетке с мелким шагом h. В итоге аппроксимация записана в матрично-векторном виде

$$\tilde{A}\bar{y} + \tilde{C}\bar{y} \ni \tilde{f}, \tag{19}$$

где

$$\bar{y} = (\bar{u}, \bar{\lambda})^T, \quad \tilde{f} = (\bar{f}, 0)^T \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & F \\ -F^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в отличие от случая, рассмотренного в п. 3.2, получено включение, в котором матрица $\tilde{A}$ является лишь положительно полуопределенной, а не положительно определенной, и существование единственного решения включения (19) не следует из общей теории.

Доказана

Теорема 3. *Решение включения (19) существует и единственно.*

Для решения (19) применена схема Дугласа – Рекфорда

$$\begin{cases} D^{-1}(E + D\tilde{C})\bar{y}^{n+1/2} \ni D^{-1}\bar{y}^n + \tilde{f} - \tilde{A}\bar{y}^n, \\ B(\bar{y}^{n+1} - \bar{y}^n) = \bar{y}^{n+1/2} - \bar{y}^n, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$B = E + D\tilde{A} = \begin{pmatrix} E_1 + \tau_1 A_1 & 0 & -\tau_1 F_1 \\ 0 & E_2 + \tau_2 A_2 & -\tau_2 F_2 \\ -\tau_3 F_1^T & -\tau_3 F_2^T & E_3 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

и $D = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_3)$, E_i — единичные матрицы соответствующих размерностей. В этом случае теоретические оценки скорости сходимости и оптимальные итерационные параметры метода Дугласа – Рэкфорда неизвестны. В работе приведено обобщение на случай переменных итерационных параметров по подобластям результатов P. L. Lions и B. Mercier[2] о сходимости метода Дугласа – Рэкфорда для суммы двух максимально монотонных операторов.

Реализация первого шага метода (20) сводится к нахождению значений $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{\lambda}$ по явным формулам, а второй шаг, в отличие от случая п. 3.2, представляет собой связную, через значения $\bar{\lambda}^{n+1}$, систему

$$\begin{cases} (E_1 + \tau_1 A_1)(\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n) + \tau_1 F_1(\bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}^n) = \bar{u}_1^{n+1/2} - \bar{u}_1^n & \text{в } \ \omega_1 \cup s_1, \\ (E_2 + \tau_2 A_2)(\bar{u}_2^{n+2} - \bar{u}_2^n) + \tau_2 F_2(\bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}^n) = \bar{u}_2^{n+1/2} - \bar{u}_2^n & \text{в } \ \omega_2 \cup s_2, \\ \bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}^n - \tau_3 F_1^T(\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n) - \tau_3 F_2^T(\bar{u}_2^{n+1} - \bar{u}_2^n) = \bar{\lambda}^{n+1/2} - \bar{\lambda}^n & \text{на } \ s_2, \end{cases}$$

где через ω_i, $i = 1, 2$, обозначены множества внутренних сеточных узлов в подобластях Ω_i, s_i — множества узлов соответствующей сетки на S.

Для того, чтобы получить систему несвязных задач, предложено выбрать матрицу B в (20), например, в виде

$$B = \begin{pmatrix} E_1 + \tau_1 A_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 + \tau_2 A_2 & 0 \\ -\tau_3 F_1^T & -\tau_3 F_2^T & E_3 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Тогда на втором шаге метода (20) получим систему несвязных задач по подобластям, решив которые, найдем $\bar{\lambda}^{n+1}$:

$$\begin{cases} (E_1 + \tau_1 A_1)(\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n) = \bar{u}_1^{n+1/2} - \bar{u}_1^n & \text{в } \ \omega_1 \cup s_1, \\ (E_2 + \tau_2 A_2)(\bar{u}_2^{n+2} - \bar{u}_2^n) = \bar{u}_2^{n+1/2} - \bar{u}_2^n & \text{в } \ \omega_2 \cup s_2, \\ \bar{\lambda}^{n+1} - \bar{\lambda}^n - \tau_3 F_1^T(\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n) - \tau_3 F_2^T(\bar{u}_2^{n+1} - \bar{u}_2^n) = \bar{\lambda}^{n+1/2} - \bar{\lambda}^n & \text{на } \ s_2. \end{cases}$$

В п. 3.4 приведены результаты вычислительных экспериментов, где сравнивались числа итераций метода расщепления для решения схемы с множителями Лагранжа (19) при $B = E + DA$ и при выборе матрицы B в виде (22), и схемы без множителей (13) при различных начальных приближениях. На основании результатов экспериментов сделаны следующие выводы:

[2] *Lions P. L.* Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators / P. L. Lions, B. Mercier // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. – P. 964–979.

1. В случае гладкого начального приближения, согласованного с граничными условиями, методы ведут себя одинаково.
2. Метод с множителями Лагранжа менее чувствителен к выбору начального приближения.
3. В случае схемы с множителями Лагранжа нужно дополнительно подбирать итерационный параметр τ_3 для λ. Параметры τ_1 и τ_2 во всех случаях выбирались как теоретически оптимальные для задачи (13) и из вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что они близки к оптимальным также в методе Дугласа – Рэкфорда для задачи (19).
4. Выбор матрицы B в виде (21) или (22) дает одинаковые числа итераций схемы расщепления, но в последнем случае получается система несвязных задач по подобластям.

Четвертая глава посвящена решению двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2,$ — область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \cup \bar{\Gamma}_N$, где Γ_D и Γ_N — непересекающиеся части $\partial\Omega$ и $\operatorname{mes}\Gamma_D \neq 0$. Задачу Стефана формально можно записать следующим образом: найти пару $(u(x,t), \gamma(x,t))$, такую, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} + v\dfrac{\partial\gamma}{\partial x_1} - \Delta u = 0, & \text{в } Q = \Omega \times (0,T], \\ u = z(x,t) & \text{на } \Sigma_D = \Gamma_D \times (0,T], \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g(x,t) & \text{на } \Sigma_N = \Gamma_N \times (0,T], \\ \gamma(x,t) \in H(u(x,t)) & \text{в } Q, \\ \gamma(x,0) = \gamma_0(x) & \text{в } \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{23}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $v = \text{const} > 0$, z, g и γ_0 — заданные функции. Также считаем, что график функции $H : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ монотонно возрастает и содержит вертикальный сегмент и предполагаем, что функция H однозначна в точках Γ_D.

Задача (23) является математической моделью процесса охлаждения слитка металла при непрерывной выплавке. Здесь u соответствует температуре металла, $H(u)$ — энтальпии, а v — скорость движения слитка в направлении x_1. Функция энтальпии имеет скачок, например, для меди.

Известно, что если $g \in L_2(\Sigma_N)$, $\gamma_0 \in H(u_0)$ для некоторого $u_0 \in L_\infty(\Omega)$, и $\exists\, z_Q \in L_2(0,T; H^1(\Omega))$, такая что $z_Q = z$ на Σ_D, то существует единственное обобщенное решение задачи (23).

На временном отрезке $[0,T]$ построена равномерная сетка с шагом τ и проведена полудискретизация задачи при помощи аппроксимации

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\gamma \approx \frac{1}{\tau}\big(\gamma(x_1,x_2,x_3,t) - \gamma(\tilde{x}_1,x_2,x_3,t-\tau)\big), \quad \tilde{x}_1 = x_1 - v\tau. \tag{24}$$

После дискретизации по времени рассматриваемая задача Стефана на каждом временном слое может быть записана в следующем поточечном виде:

$$
\begin{cases}
-\Delta u + Cu \ni f & \text{в } \Omega,\\
u = z & \text{на } \Gamma_D,\\
\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{на } \Gamma_N,
\end{cases}
\tag{25}
$$

где $Cu = H(u)/\tau$ — многозначный максимально монотонный оператор.

В п. 4.1 рассмотрен смешанный гибридный МКЭ для задачи (25). Кроме обозначений, введенных в главе 2, использованы следующие. Определена билинейная форма $\mathscr{K} : U \times U \to \mathbb{R}$,

$$
\mathscr{K}(q,\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{e_i} \gamma_i q_i dx,
$$

и линейные формы

$$
\mathscr{F}(q) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{e_i} f q_i dx, \quad \ell(\mu) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_1} \int\limits_{\Gamma_{i,m+j}} g \mu_{i,m+j} d\Gamma,
$$

$$
r(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=s_1+1}^{s} \int\limits_{\Gamma_{i,m+k}} z(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i) d\Gamma.
$$

Обобщенной смешанной гибридной формулировкой задачи (25) является следующая задача: найти $(u, \mathbf{v}, \lambda, \gamma) \in U \times \mathbf{V} \times \Lambda \times U$, такую, что

$$
\begin{cases}
\mathscr{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathscr{B}(u,\mathbf{w}) + \mathscr{G}(\lambda,\mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V},\\
\mathscr{B}(q,\mathbf{v}) - \mathscr{K}(q,\gamma) = -\mathscr{F}(q) & \forall q \in U,\\
\mathscr{G}(\mu,\mathbf{v}) = -\ell(\mu) & \forall \mu \in \Lambda,\\
\gamma(u) \in \bar{C}u,
\end{cases}
\tag{26}
$$

где $\bar{C}u = (H(u_1)/\tau, \ldots, H(u_m)/\tau)$ для $u \in U$.

Смешанная гибридная постановка (26) и задача (25) эквивалентны.

Аналогично главе 2 проведена аппроксимация задачи (26) и получено конденсированное включение с матрицей, совпадающей с матрицей включения (8) для задачи о препятствии, и максимально монотонным оператором. Отсюда сделан вывод, что результаты о сходимости метода (5) справедливы и при решении задачи Стефана на каждом временном слое. Приведены результаты численной реализации метода, показывающие, что число итераций метода (5) не зависит от шага сетки.

В п. 4.2 для задачи Стефана (23) предложены и численно исследованы схемы расщепления типа предиктор–корректор, построенные на основе декомпозиции области. Здесь рассмотрен случай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть в области Ω построена равномерная сетка с шагом h. Неявная сеточная схема для задачи (23) с использованием аппроксимации (24) и стандартного семиточечного шаблона для аппроксимации оператора Лапласа может быть записана на фиксированном временном слое $t_{n+1} = (n+1)\tau$ в виде

$$\frac{1}{\tau}(\bar{\gamma}^{n+1} - \tilde{\gamma}^n) + A\bar{u}^{n+1} = 0, \quad \bar{\gamma}^{n+1} \in H(\bar{u}^{n+1}), \tag{27}$$

где A — конечно–разностная аппроксимация оператора Лапласа с соответствующими краевыми условиями, $\tilde{\gamma}^n$ — вектор с координатами $\tilde{\gamma}_i^n = \gamma(x_1 - -\tau v, x_2, x_3, \tau n)$, $\gamma(x) \in H(u(x))$ и через $H(\bar{u}^{n+1})$ обозначен вектор $\bar{H}(\bar{u}^{n+1}) = = (H(u_1^{n+1}), H(u_2^{n+1}), \ldots)$.

Наряду со схемой (27) рассмотрены схемы с расщеплением оператора A на сумму операторов $A = A_1 + A_2$ вида

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(\bar{\gamma}^{n+1/2} - \tilde{\gamma}^n) + A_1\bar{u}^{n+1/2} + A_2\bar{u}^n = 0, \quad \bar{\gamma}^{n+1/2} \in H(\bar{u}^{n+1/2}), \\ \dfrac{1}{\tau}(\bar{\gamma}^{n+1} - \tilde{\gamma}^n) + A_1\bar{u}^{n+1/2} + A_2\bar{u}^{n+1} = 0, \quad \bar{\gamma}^{n+1} \in H(\bar{u}^{n+1}). \end{cases} \tag{28}$$

Предложены два способа выбора операторов A_1 и A_2, основанные на декомпозиции исходной области.

Рассмотрен случай $\Omega = (0,\ell_1) \times (0,\ell_2) \times (0,\ell_3)$ и произведена декомпозиция области плоскостью $S = \{x : x_1 = \mathrm{const}\}$, которая проходит через линии сетки в направлениях x_2 и x_3. Обозначим через δ_S характеристическую функцию плоскости S, т. е. сеточная функция $\delta_S(x) = 1$ для $x \in S \cap \bar{\omega}$, тогда как $\delta_S(x) = 0$ для других сеточных точек. Здесь через $\bar{\omega}$ обозначено множество сеточных точек, включая точки, лежащие на границе области Ω.

Схема 1. Явный предиктор – неявный корректор (EPIC). Возьмем операторы в виде $A_1 = (1-\delta_S)A$ и $A_2 = \delta_S A$. В этом случае реализация схемы (28) состоит из следующих шагов:

1. Предиктор: вычисление $\bar{u}^{n+1/2}$ и $\bar{\gamma}^{n+1/2}$ на границе S с использованием явной схемы:

$$\frac{1}{\tau}(\bar{\gamma}^{n+1/2} - \tilde{\gamma}^n) + A\bar{u}^n = 0, \quad \bar{\gamma}^{n+1/2} \in H(\bar{u}^{n+1/2});$$

2. Основной шаг: решение несвязной системы задач в подобластях

$$\frac{1}{\tau}(\bar{\gamma}^{n+1/2} - \tilde{\gamma}^n) + A\bar{u}^{n+1/2} = 0, \quad \bar{\gamma}^{n+1/2} \in H(\bar{u}^{n+1/2}) \quad \text{в } \omega_i, \ i = 1,2 \tag{29}$$

с условиями Дирихле на границе S, вычисленными на шаге 1. Решение этих задач может осуществляться независимо друг от друга;

3. Корректор: решение двумерной задачи на S. Во внутренних точках $(ih, jh, kh) = x \in S$ уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{1}{\tau}(\gamma^{n+1} - \gamma^n) - \Delta_{x_2x_3}u^{n+1} + \frac{2}{h_1^2}u^{n+1} = \frac{u_{i-1,j,k}^{n+1/2} + u_{i+1,j,k}^{n+1/2}}{h_1^2}, \ \gamma^{n+1} \in H(u^{n+1}),$$

где $\Delta_{x_2x_3}u = u_{x_2\bar{x}_2} + u_{x_3\bar{x}_3}$, γ^n – соответствующая координата вектора $\tilde{\gamma}$.

Отметим, что схема EPIC без шага "корректор" является лишь условно устойчивой.

Схема 2. Неявный предиктор – явный корректор (IPEC). Положив в (28) $A_2u = -\delta_S u_{x_1\bar{x}_1}$ и $A_1 = A - A_2$, получим схему, реализация которой состоит из следующих шагов:

1. Предиктор: решение неявной двумерной сеточной задачи на S, которая для внутренних точек S имеет вид

$$\frac{1}{\tau}(\gamma^{n+1/2} - \gamma^n) - \Delta_{x_2x_3}u^{n+1/2} = u^n_{x_1\bar{x}_1}, \quad \gamma^{n+1/2} \in H(u^{n+1/2});$$

2. Основной шаг (совпадает с предыдущей схемой): решение задач (29) в подобластях;
3. Корректор: уточнение значений $\bar{u}$, $\bar{\gamma}$ на S по формулам

$$\frac{1}{\tau}(\gamma^{n+1} - \gamma^n) + \frac{2}{h_1^2}u^{n+1} = \Delta_{x_2x_3}u^{n+1/2} + \frac{u^{n+1/2}_{i-1,j,k} + u^{n+1/2}_{i+1,j,k}}{h_1^2}, \ \gamma^{n+1} \in H(u^{n+1}).$$

Проведено численное сравнение построенных схем с неявной схемой (27). Численно показана безусловная устойчивость построенных схем.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Получены смешанные гибридные постановки эллиптических вариационных неравенств с ограничениями на решение внутри или на границе области, обоснована их эквивалентность исходным дифференциальным постановкам. Построены схемы смешанного гибридного метода конечных элементов низкого порядка аппроксимации. Обоснован итерационный метод решения построенных схем и получены оценки скорости сходимости метода. Построен и исследован эффективный итерационный метод решения классической схемы МКЭ для задачи Синьорини.

2. На основе метода декомпозиции области построены сеточные схемы для задачи о препятствии. Обоснована сходимость итерационного метода Дугласа – Рэкфорда для построенных схем, обсуждены алгоритмы его реализации.

3. Построена смешанная гибридная схема для двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией. Предложен и обоснован итерационный метод ее решения.

4. Построены и численно исследованы схемы расщепления типа предиктор–корректор для двухфазной задачи Стефана с предписанной конвекцией. Численно показана безусловная устойчивость схем.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Игнатьева М. А.* Совместное использование итерационной схемы расщепления и метода декомпозиции области при решении эллиптических вариационных неравенств / М. А. Игнатьева // Матер. Всеросс. молодежной науч. шк.-конф. по матем. моделированию, геометрии и алгебре. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1998. — С. 61–65.

[2] *Игнатьева М. А.* Решение сеточных вариационных неравенств, построенных на основе метода декомпозиции области с неналегающими подобластями / М. А. Игнатьева // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казан. матем. об-во. — Казань: УНИПРЕСС, 1998. — С. 228-232.

[3] *Игнатьева М. А.* О методе решения двумерной задачи теплопроводности с фазовым переходом / М. А. Игнатьева // Матер. шк.-конф.: Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1999. — С. 107–108.

[4] *Ignatieva M. A.* A domain decomposition method for Stefan problem with prescribed convection / M. A. Ignatieva // Iterative methods and matrix computations. The International Summer School. — Rostov–on–Don, 2002. — P. 401–407.

[5] *Игнатьева М. А.* Применение смешанных гибридных элементов при решении эллиптических односторонних краевых задач / М. А. Игнатьева, Ю. А. Кузнецов, А. В. Лапин // Матер. II Всеросс. молодежной науч. шк.-конф. "Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач". — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. — С. 128–140.

[6] *Ignatieva M. A.* Mixed hybrid finite element scheme for Stefan problem with prescribed convection / M. A. Ignatieva, A. V. Lapin // *Lobachevskii J. Math.* — 2003. — V. 13. — P. 15–24. — (http://ljm.ksu.ru/vol13/ila.htm).

[7] *Ignatieva M. A.* Iterative solution of a mixed hybrid finite element scheme for the Signorini problem / M. A. Ignatieva, A. V. Lapin // *Comp. Meth. in Appl. Math.* — 2004. — V. 4, No. 2. — P. 180–191.